

Zinsrechnung

1. Grundlagen
2. Lineare Verzinsung
3. Exponentielle Verzinsung
4. Übungsaufgaben

1. Grundlagen



Zinsen sind der Preis für das Leihen von Geld. Sie ergeben sich prozentual aus dem ver- bzw. geliehenen Geldbetrag und sind auf eine bestimmte Zeitperiode bezogen (z.B. 100.000 € zu 3 % pro Jahr → 3.000 € pro Jahr).

Warum gibt es Zinsen (z.B. bei Bankkrediten)?

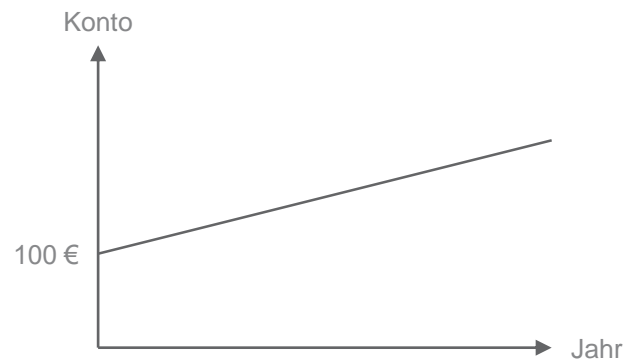
- Opportunitätskosten (Bank könnte knappes Geld anderen leihen)
- Transaktionskosten (z.B. persönliche Beratung vor Kreditaufnahme)
- Risikoprämie (Berücksichtigung des Kreditausfallrisikos)

2. Lineare Verzinsung › 2.1 Grundlagen

Bei der linearen Verzinsung ergeben sich die Zinsen in jeder Periode prozentual aus dem **Startbetrag**.

Beispiel: Auf einem Bankkonto werden Guthaben bis 100 € mit 10 % pro Jahr verzinst.

Jahr	0	1	2	3
Konto	100 €	110 €	120 €	130 €
Zinsen		10 €	10 €	10 €



2. Lineare Verzinsung › 2.2 Variablen & Formeln

Variablen:

- n : Periode (z.B. 10 Jahre)
- i : Zinssatz (z.B. 10 % pro Jahr $\rightarrow 0,1$)
- K_0 : Anfangsbetrag
- Z_n : Gesamtzinsen Periode
- K_n : Endbetrag Periode

Formeln:

- $K_n = K_0 * (1 + i * n)$
- $K_0 = \frac{K_n}{(1+i*n)}$
- $i = \frac{K_n - K_0}{K_0 * n}$
- $n = \frac{K_n - K_0}{K_0 * i}$
- $Z_n = K_0 * i * n$

2. Lineare Verzinsung › 2.3 Beispielaufgabe

Ein Guthaben von 2.300 € wird mit 6 % pro Jahr über 4 Jahre linear verzinst. Wie viele Zinsen fallen insgesamt an und wie hoch ist der Kontostand nach 4 Jahren?

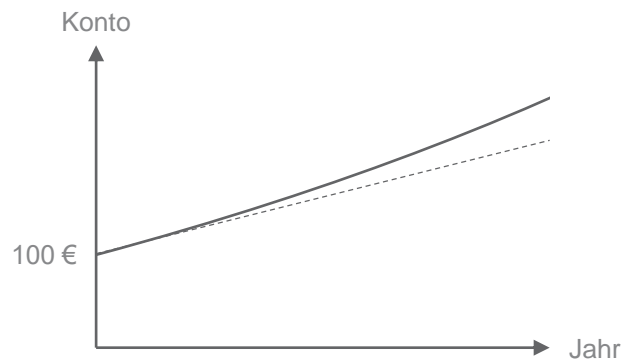
- $Z_n = K_0 * i * n$
- $Z_4 = 2.300 * 0,06 * 4$
- $Z_4 = \underline{552 \text{ €}}$
- $K_n = K_0 * (1 + i * n)$
- $K_4 = 2.300 * (1 + 0,06 * 4)$
- $K_4 = \underline{2.852 \text{ €}}$

3. Exponentielle Verzinsung › 3.1 Grundlagen

Bei der exponentiellen Verzinsung ergeben sich die Zinsen in jeder Periode prozentual aus dem **Endbetrag der letzten Periode**.

Beispiel: Auf einem Bankkonto werden alle Guthaben mit 10 % pro Jahr verzinst.

Jahr	0	1	2	3
Konto	100 €	110 €	121 €	133,10 €
Zinsen		10 €	11 €	12,10 €



3. Exponentielle Verzinsung › 3.2 Variablen & Formel

Variablen:

- n : Periode
- i : Zinssatz
- K_0 : Anfangsbetrag
- K_n : Endbetrag Periode

Formel:

- $K_n = K_0 * (1 + i)^n$
 - $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$
 - $i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$
 - $n = \frac{\log(K_n) - \log(K_0)}{\log(1+i)}$

3. Exponentielle Verzinsung › 3.3 Beispielaufgabe



Ein Guthaben von 2.300 € wird mit 6 % pro Jahr über 4 Jahre exponentiell verzinst. Wie hoch ist der Kontostand nach 4 Jahren?

- $K_n = K_0 * (1 + i)^n$
- $K_4 = 2.300 * (1 + 0,06)^4$
- $K_4 \approx \underline{2.903,70 \text{ €}}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 1

Eine Familie möchte ihrem neugeborenen Kind zum 18. Geburtstag ein Auto schenken, das voraussichtlich 20.000 € kosten wird. Wie viel Geld muss die Familie dafür bei der Geburt des Kindes auf ein Sparkonto legen, wenn das Geld und die Zinsen darauf über den gesamten Zeitraum mit 3,5 % pro Jahr verzinst werden?

- exponentiell $\rightarrow K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$

- $K_0 = \frac{20.000}{(1+0,035)^{18}}$

- $K_0 \approx \underline{10.767,22 \text{ €}}$

oder:

- $K_n = K_0 * (1 + i)^n$

- $20.000 = K_0 * (1 + 0,035)^{18}$

- $20.000 \approx K_0 * 1,8575 \mid /1,8575$

- $K_0 \approx \underline{10.767,16 \text{ €}}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 2

Ein Betrag von 7.800 € wird mit 3,9 % pro Quartal linear verzinst. Wie hoch ist der Endbetrag nach a) 9 Monaten bzw. b) einem Jahr?

- linear $\rightarrow K_n = K_0 * (1 + i * n)$

a) 3 Quartale $\rightarrow K_3 = 7.800 * (1 + 0,039 * 3) = \underline{8.712,60 \text{ €}}$

b) 4 Quartale $\rightarrow K_4 = 7.800 * (1 + 0,039 * 4) = \underline{9.016,80 \text{ €}}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 3

Auf einem Konto liegen 10.000 €. Guthaben wird hier mit 6,8 % pro Halbjahr verzinst. Innerhalb welcher Zeitspanne verdoppelt sich der Anfangsbetrag durch Zinseszinsen?

- exponentiell $\rightarrow n = \frac{\log(K_n) - \log(K_0)}{\log(1+i)}$
- $n = \frac{\log(20.000) - \log(10.000)}{\log(1+0,068)}$
- $n \approx \underline{10,54} \rightarrow 11 \text{ Halbjahre}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 4

Ein Unternehmen nimmt am 04.03. einen Kredit in Höhe von 37.000 € auf, der am 26.09. desselben Jahres vollständig mit einem Betrag von 41.500 € (inkl. Zinsen) zurückgezahlt werden muss. Berechnen Sie den auf ein Jahr bezogenen Zinssatz dieses Kredites. Hinweis: Nach der Deutschen Zinsmethode hat jeder Monat 30 Tage und das Jahr 360 Tage.

- linear (Zins- > Betrachtungszeitraum) $\rightarrow i = \frac{K_n - K_0}{K_0 * n}$
- **Laufzeit:** $26 + 5 * 30 + 26 = 202 \text{ Tage} \rightarrow n = \frac{202}{360} \text{ Jahre}$
- $i = \frac{41.500 - 37.000}{37.000 * (202/360)}$
- $i \approx \underline{0,217}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 5

Eine Person leiht sich 8.000 € und zahlt nach 3 Jahren 8.650 € zurück.
Welchem jährlichen Zinssatz entspricht diese Rückzahlung?

- exponentiell (Zins- < Betrachtungszeitraum, aber keine Zahlung) $\rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$
- $i = \sqrt[3]{\frac{8.650}{8.000}} - 1$
- $i \approx \underline{0,026}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 6



- a) Innerhalb welches Zeitraums wachsen 6.000 € bei linearer Verzinsung von 1,39 % auf 6.500 € an?

- b) Welcher Betrag müsste zu gleichen Konditionen angelegt werden, um in der Hälfte der Zeit aus Teilaufgabe a) auf 6.500 € anzuwachsen?

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 6 a)



a) Innerhalb welches Zeitraums wachsen 6.000 € bei linearer Verzinsung von 1,39 % auf 6.500 € an?

- linear $\rightarrow n = \frac{K_n - K_0}{K_0 * i}$

- $n = \frac{6.500 - 6.000}{6.000 * 0,0139}$

- $n \approx \underline{6}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 6 b)

b) Welcher Betrag müsste zu gleichen Konditionen angelegt werden, um in der Hälfte der Zeit aus Teilaufgabe a) auf 6.500 € anzuwachsen?

- linear $\rightarrow K_0 = \frac{K_n}{(1+i*n)}$
- $K_0 = \frac{6.500}{(1+0,0139*3)}$
- $K_0 \approx \underline{\underline{6.239,80 \text{ €}}}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 7

Ein Elektroautohersteller produzierte im Jahr 2015 insgesamt 12.670 Autos. 2020 waren es bereits 138.740 Autos. Welcher konstanten jährlichen Wachstumsrate entspricht diese Steigerung?

- exponentiell (Wachstum verglichen mit Vorjahr) $\rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$
- $i = \sqrt[5]{\frac{138.740}{12.670}} - 1$
- $i \approx 0,61 \rightarrow \underline{61\%}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 8

Zur privaten Altersvorsorge sollen 10.000 € in verschiedene Aktien investiert werden. Wie viel Geld steht bei einer angenommenen konstanten jährlichen Wachstumsrate von 5,3 % nach 40 Jahren zur Verfügung, wenn a) die Kauf- und Verkaufsgebühren für Aktien bei jeweils 1,5 % des Transaktionsvolumens liegen oder b) realisierte Kursgewinne mit 25 % besteuert werden?

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 8 a)

Zur privaten Altersvorsorge sollen 10.000 € in verschiedene Aktien investiert werden. Wie viel Geld steht bei einer angenommenen konstanten jährlichen Wachstumsrate von 5,3 % nach 40 Jahren zur Verfügung, wenn die Kauf- und Verkaufsgebühren für Aktien bei jeweils 1,5 % des Transaktionsvolumens liegen?

- exponentiell (Wachstum verglichen mit Vorjahr) $\rightarrow K_n = K_0 * (1 + i)^n$
- **Kauf:** $10.000 * 0,985 = 9.850$ (bei 1,5 % Gebühr bleiben 98,5 % übrig!)
- $K_n = 9.850 * (1 + 0,053)^{40} \approx 77.726,85$
- **Verkauf:** $77.726,85 * 0,985 \approx \underline{76.560,95 \text{ €}}$

4. Übungsaufgaben › Aufgabe 8 b)

Zur privaten Altersvorsorge sollen 10.000 € in verschiedene Aktien investiert werden. Wie viel Geld steht bei einer angenommenen konstanten jährlichen Wachstumsrate von 5,3 % nach 40 Jahren zur Verfügung, wenn realisierte Kursgewinne mit 25 % besteuert werden?

- exponentiell (Wachstum verglichen mit Vorjahr) $\rightarrow K_n = K_0 * (1 + i)^n$
- $K_n = 10.000 * (1 + 0,053)^{40} \approx 78.910,51$
- **nach Steuer:** $(78.910,51 - 10.000) * 0,75 + 10.000 \approx \underline{61.682,88 \text{ €}}$

(Steuer fällt nur auf Kursgewinne an, bei 25 % bleiben 75 % übrig)